

1815 5 7 9 ijslenes

U d f a s t
t i l
e n T h e o r i e
o m
De harmoniske Progreſſioner.

Indbydelseskriſt
t i l
den offentlige Examen,
ſom holdes
i Riber Cathedralſkole
d. 5te til 17de Septbr. 1814.

Red
H. J. Hanſen,
Adjunct.



R i b e.
Købt hos M. S. Høphoff.

5 7 9 iplesnes
Himedes und der Schüler.

Des kam ein wißbegierter Jüngling,
ich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
die Frucht dem Vaterlande getragen
Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt
kannst du die Kunst? Sie ist's, erwiebert der
Weise,
s war sie mein Sohn, eh' sie dem Staate
gedient.
ur Früchte von ihr, die kann auch die Sterbliche
zeugen,
die Göttin freit, suche in ihr nicht das Weib."

Schiller.

Ved min Læsning i mathematisk Skrifte stodte jeg oftere paa Steder, hvor harmoniske Rækker nævntes. Begierlig efter at kende dem næiere, søgte jeg i de mathematisk Skrifte, jeg her kan overkomme, men traf ikke Definitionen i Wolffii Elementis Analysis §. 186. Jeg besluttede derfor ved Hjælp af denne Definition og af de Bemærkninger, jeg leilighedsviis havde gjort, at undersøge disse Rækker's Egenskaber og at fremsætte dem i en sammenhængende Orden. Resultaterne af denne Undersøgelse er det jeg herved fremlægger, og hvis Ufuldstændighed kyndige Læsere ville undskylde med mine Hjælpe-midlers fragmentariske Beskaffenhed, og derfor bedømme med Skaansomhed. Ved Udførelsen fandt jeg at denne Materie, hvad de harmoniske Rækker selv angaaer, er temmelig ufrugtbar, men at den kan føre til meget interessante Bemærkninger over adskillige andre Rækker, hvor paa §. 13 — 15 kunne tjene til Exempel. Disse Rækker kunne fortjene en nærmere Betragtning, som Tiden ikke denne Gang tillader mig, da jeg uforventet er truften paa dem. Imidlertid tjene de til Beviis paa, at naar man søger, finder man, om just ikke det, man leder efter, saa dog undertiden noget Vedre.

§. 1.
Ere tre Tal a , b og c saaledes beskafte at $a - b : b - c :: a : c$, siges disse tre Tal at udgjøre en sammenhængende harmonisk Proportion. En Række Tal, hvoraf hver tre paa hinanden følgende udgjøre en sammenhængende harmonisk Proportion kaldes en harmonisk Progression eller Talrække.

§. 2.
Ere tre paa hinanden følgende Led i en harmonisk Række k , 1 , x , findes af Proportionen $k - 1 : 1 - x :: k : x$, $x = \frac{k}{2k-1}$. Forandres disse tre Størrelser til Brøker med eens Tæller, blive de $\frac{k}{1}$, $\frac{k}{k}$, $\frac{k}{2k-1}$. Heraf sees at hver tre paa hinanden følgende Led kunne udtrykkes som Brøker, hvis Tællere ere det samme Tal, men hvis Nævnere udgjøre en sammenhængende arithmetisk Proportion.

§. 3.
Følgelig maa enhver harmonisk Række kunne udtrykkes ved en Række Brøker, hvis Tællere ere



det samme Tal, men hvis Rævnere udgjøre en arithmetisk Progression.

En harmonisk Række kan derfor i Almindelighed fremstilles under denne Form:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{b+d}, \frac{a}{b+2d}, \dots, \frac{a}{b+(n-1)d} = \frac{a}{b-d+nd}, \dots$$

hvor n er Viseren og d kan være enten positiv eller negativ efter Rækkens Beskaffenhed.

§. 4.

Ere de to første Led af en harmonisk Række A og B , bliver efter §. 2 det tredie $\frac{AB}{2A-B}$, det fjerde $\frac{AB}{3A-2B}$, det nte $\frac{AB}{(n-1)A-(n-2)B}$.

At Udtrykkene i 3de og 4de §. kunne forandres det ene til det andet behøver neppe at erindres. Nemlig $A = \frac{a}{b}, B = \frac{a}{b+d}$; $a = \frac{ABd}{A-B}, b = \frac{AB}{A-B}$ hvor d altid kan bestemmes saaledes at a og b blive hele Tal ved at sætte $d = A - B$, hvorved a bliver $= AB$, $b = B$ og $d = A - B$.

§. 5.

Nogle Exempler kunne oplyse det foregaaende.

Er $A = 5, B = 8$, bliver det tredie Led $\frac{40}{11} = 3\frac{7}{11}$, det almindelige Led $\frac{40}{5(n-1)-8(n-2)} = \frac{40}{11-3n}$, hvilket bliver negativt, naar $3n > 11$, altsaa fra det fjerde Led af.

Ere de to første Led 6 og 8 er $a = 48, b = 8$ og $d = -2$, altsaa (§. 3) det almindelige Led $\frac{48}{10-2n}$, hvor det femte Led bliver uendeligt formodetst Nat.



neren $10 - 10 = 0$. De første Led af denne Række ere nemlig:

$$6, 8, 12, 24, \infty, -24, -12 \text{ o. s. v.}$$

§. 6.

Disse Exempler vise, at nogle Led kunne være negative og endog uendelige. Følgende Betragtninger vise, naar og hvorvidt disse Tilfælde finde Sted.

Skal et Led være negativt, saa maa i §. 4. $(n-1)A - (n-2)B < 0$ eller $(n-1)A < (n-2)B$, følgelig $\frac{A}{B} < \frac{n-2}{n-1}$ og da n kan modtage alle Værdier, følgelig ogsaa være $= \infty$, hvorved $\frac{n-2}{n-1}$ forandres til 1, maa $\frac{A}{B}$ være < 1 , det er $A < B$, naar Rækken skal have negative Led.

At Rækken i §. 3. sees det samme: thi naar her et Led skal blive negativt maa $b + (n-1)d$ være negativt, det er d maa være negativt, og altsaa andet Led større end første.

Udtrykket i §. 3. viser, at naar et Led er negativt, ere alle de følgende det ogsaa; for at bestemme hvor mange positive Led Rækken indeholder, behøver man altsaa kun at søge hvad Værdie n erholder for det første negative Led eller for det uendelige, hvorom nu strax skal handles.

§. 6. Er $A = 7, B = 15$, saa er $\frac{7}{15} < \frac{n-2}{n-1}$; følgelig $15n - 30 > 7n - 7$ eller $8n > 23$, $n > \frac{23}{8}$, saa at allerede det tredie Led er negativt.



Er $d = A - B$ positiv, altsaa $A > B$ viser Formlen i §. 3. at intet Led kan blive negativt, med mindre man vil antage negative Indices. Naar $A > B$, bliver ogsaa ethvert følgende Led mindre end det foregaaende.

Skal et Led være uendeligt maa dets Nævner være lig 0, d: $(n-1)A = (n-2)B$, hvoraf udledes $n = \frac{2B-A}{B-A} = 1 + \frac{B}{B-A}$ og da n skal være et heelt Tal, maa $B-A$ være en Divisor af B og derfor ogsaa af A .

Dette er hvad der i Almindelighed kan være at agte ved de enkelte Led i en harmonisk Række.

§. 7.

Om den hele Række kan dette bemærkes at man kan fortsætte den til begge Sider ved at sætte n positiv og negativ hvorved man efter forrige §. kan bedømme mod hvilken Side der falde positive eller negative eller positive og negative Led.

At fortsætte en given Række foran det første Led, er det samme som til en Række, hvis første Led er $\frac{a}{b}$, andet $\frac{a}{b-d}$, at søge de øvrige Led. Det Led i den saaledes tilbage fortsatte Række, hvis Afstand fra Rækkens Begyndelse er m , bliver altsaa

$$\frac{a}{b - (m-1)d}.$$

Vil man undersøge, hvad Bessaffenhed Rækken maa have for at de negative Led kunne være lige store med de positive behøver man kun at sætte

$$\frac{a}{b + (n-1)d} = -\frac{a}{b - (m-1)d} \text{ eller } b + (n-1)d$$



$= (m-1)d - b$, hvoraf erhholdes $m - n = \frac{2b}{d}$; da $m - n$ maa være et heelt Tal, er d en Factor af $2b$; saaoftederved en Række indeholder et uendeligt Led, ere de paa begge Sider deraf liggende Led ligestore og modsatte: f. E. Er $2b = 12$, $d = 2$, saa er Rækken med sine Indices

$$\begin{array}{cccccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{a}{-4} & \frac{a}{-3} & \frac{a}{-2} & \frac{a}{-1} & \frac{a}{0} & \frac{a}{1} & \frac{a}{2} & \frac{a}{3} & \dots \end{array}$$

Her forekommer det uendelige Led $\frac{a}{0}$ fordi d er en Factor af b . (§. 6.)

Er $2b = 6$, $d = 2$, bliver Rækken

$$\begin{array}{cccccccc} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{a}{-3} & \frac{a}{-2} & \frac{a}{-1} & \frac{a}{0} & \frac{a}{1} & \frac{a}{2} & \frac{a}{3} \dots \end{array}$$

Her forekommer intet uendeligt Led fordi d vel er en Factor af $2b$, men ikke af b .

Er $2b = 6$, $d = 4$ bliver Rækken

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{a}{-2} & \frac{a}{-1} & \frac{a}{0} & \frac{a}{1} & \frac{a}{2} & \frac{a}{3} \dots \end{array}$$

Her forekommer intet uendeligt Led og de negative kunne ikke være ligestore med de positive, da d hverken er en Factor af b eller af $2b$.

§. 8.

Skal der imellem to givne Tal P og Q findes et vist Antal $(n-2)$ Tal, som tilligemed hine udgøre en harmonisk Række af n Led, indsees let Fremgangsmaaden af det foregaaende:

Man forandrer nemlig de to givne Tal til to



§. II.

og var det maaskee muligt, at der kunde op-
Maader, at finde Summen af visse harmo-
Rækker, hvis Led alle vare enten positive eller
ve, f. Ex. naar d var et positivt heelt Tal,
disse:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}.$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}. \text{ o. s. v.}$$

Summen af Quadraterne af den første af disse
ers Led fortsatte i det uendelige er $= \frac{\pi^2}{6}$,
men af Biquadraterne $= \frac{\pi^4}{90}$ o. s. v. (v.
i introd. in Anal. Infin. t. I. §. 167 til 177).
a disse (som man vel kan kalde dem) høiere
moniske Rækker kunne summeres, vil vel og en
nnende Euler kunne finde Summen af den
le harmoniske Række. Sammenstod §. 170 lærer
r hvorledes Summen af de lige Potenser af
anden Række

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \text{c. findes.}$$

§. 12.

Er end ikke Summen af nogen uendelig harmo-
Række bekendt, veed man dog i nogle Tilfæl-
orffjellen imellem to Rækker Summer. Caa-
s er

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \text{ o. s. v.}$$

den hyperboliske Logarithme til Tallet 2, hvilken
0,6931471805599.

5679 *principles*

et dermed eensstaaende i den øverste, faaes:

$$1 + \frac{n}{1(n+1)} + \frac{n}{2(n+2)} + \frac{n}{3(n+3)} + \frac{n}{4(n+4)} + \dots$$

es $n = 1$, bliver $S = 1$, altsaa

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$$

denne Række er det mte Led $= \frac{1}{m(m+1)}$ og

$$\text{sumimatoriske Led} = \frac{m}{m+1}$$

es $n = 2$, bliver $S = 1\frac{1}{2}$, altsaa

$$1\frac{1}{2} = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{4.6} + \dots$$

aa er

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{2.5} + \frac{3}{3.6} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{5.8} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{1.5} + \frac{4}{2.6} + \frac{4}{3.7} + \frac{4}{4.8} + \dots$$

v. f. v.

ettes $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2n-1} = S$, faa er

$$S = \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} - \dots$$

naar de eensstaaende Led samles,

$$S = \frac{2n}{1(2n+1)} + \frac{2n}{3(2n+3)} + \frac{2n}{5(2n+5)} + \dots$$

ettes $n = 1$, bliver

$$S = 1 = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots$$

or det almindelige Led er $= \frac{2m}{(2m-1)(2m+1)}$

det sumimatoriske $= \frac{2m}{2m+1}$.

gesaa er

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{1.5} + \frac{4}{3.7} + \frac{4}{5.9} + \frac{4}{7.11} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{6}{1.7} + \frac{6}{3.9} + \frac{6}{5.11} + \frac{6}{7.13} + \dots$$

v. f. v.

5 7 9 iiplenes



en given uendelig Række er Summen af
hine Rækker.

§. 15.

viderer man alle Leddene i den uendelige Række

$$+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = M$$

, fremkommer denne Række

$$+\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots = N = \frac{1}{2} M.$$

8 nu N fra M, bliver Resten

$$+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = R$$

de altsaa være = N og dog er hvert Led i R

end det dertil svarende i N.

enne tilsyneladende Urimelighed høves saaledes

daar Rækken M. er

$$+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2}$$

N

$$+\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{20}$$

R

$$+\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{20+1} - \frac{1}{20+2} -$$

$$- \frac{1}{20} \text{ Her er nu upaatvivleligt } R = N =$$

$$\text{og følgende } R - N = 0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots - \frac{1}{20}$$

som det er anført i §. 12.

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{20}$$

den naturlige Logaritm til Tallet 2.

$$\text{a er } \frac{1}{20+2} + \frac{1}{20+4} + \frac{1}{20+6} + \dots + \frac{1}{20}$$

$$\text{Log. nat. 2. } = 0,34657359 \dots =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \dots$$

af sees, at en Række uendelig smaa Tal kunne
samme Sum, som en Række endelige. } 121

AE

M

315679 principles

